www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

CONCOURS 1990

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Régime Technologique

Durée : 4 heures Coefficient : 4

EXERCICE 1

Trois personnes A_1 , A_2 , A_3 entrent en même temps dans une banque qui ne comporte que deux guichets. A_1 et A_2 sont servis de suite tandis que A_3 doit attendre qu'un guichet se libère pour être servi.
On suppose que le temps nécessaire pour servir le client A_i (i= 1, 2, 3) est une variable aléatoire X_i suivant une loi géométrique de paramètre p, p étant un réel élément de $]0,1[$. On suppose que les variables aléatoires X_1, X_2, X_3, sont indépendantes.

On appelle Y le temps qui s'est écoulé entre l'arrivée des trois personnes et le moment où A_3 peut accéder à un guichet grace au départ de A_1 ou A_2.On désigne par Z le temps écoulé entre l'arrivée et le départ de A_3.

1° Déterminer la probabilité de l'événement $\{ X_i > k \}$, k appartenant à $\mathbb{N}^*$.

2° Préciser l'espérance de X_i.

3° Exprimer l'événement $\{ Y > k \}$ à l'aide des variables aléatoires X_1 et X_2 et calculer $P\{ Y > k \}$. En déduire la probabilite de l'événement $\{ Y = k \}$.

4° Reconnaitre la loi de Y .

5° Calculer l'espérance mathématique de Z .

.../...

EXERCICE 2

Un pays est divisé en trois zones numérotées 1, 2, 3 et l'effectif de sa population ne change pas au cours du temps.
Soit la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

le coefficient $a_{i,j}$ de la i-ème ligne et de la j-ième colonne de la matrice A est la proportion de l'effectif de la zone j qui émigre chaque année vers la zone i ($i \neq j$) .
le coefficient $a_{i,i}$ de la i-ème ligne et de la i-ème colonne de la matrice A représente la proportion de la population de la zone i qui sera encore dans la zone i un an plus tard.

On désigne par U_0 , V_0 , W_0 les effectifs initiaux respectifs des populations des zones 1, 2, 3 et par U_n , V_n , W_n les effectifs de ces mêmes zones n années plus tard.

On pose $X_n = \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1° Démontrer que $X_{n+1} = AX_n$ pour tout n élément de $\mathbb{N}$.

2° En déduire que $X_n = A^n X_0$ pour tout n élément de $\mathbb{N}$.

3° Déterminer les valeurs propres de la matrice A ainsi que les sous-espaces propres .

4° En déduire que A peut s'écrire sous la forme PDP^{-1}, D étant une matrice diagonale et P une matrice inversible à préciser.

5° Déterminer A^n pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$.

6° Calculer U_n , V_n , W_n en fonction de n , U_0 , V_0 , W_0 .

7° Calculer les limites lorsque n tend vers $+\infty$ de U_n, V_n, W_n
On remarquera que ces limites sont indépendantes de la répartition initiale de la population dans les trois zones.

.../...

EXERCICE 3

1° On définit la fonction f sur $]0,1[$ par :

$$f(x) = x \ln x + (1-x) \ln(1-x)$$

C est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité 10 cm).

a) Montrer que $f(x) = f(1-x)$ pour tout x élément de $]0,1[$. En déduire que C présente un axe de symétrie.
b) Montrer que f peut être prolongée en une fonction continue g sur $[0,1]$.
c) Etudier la dérivabilité de g et calculer la dérivée.
d) Déterminer le sens de variation de f.
e) Tracer la courbe C.
f) Calculer en cm^2 l'aire de la partie du plan délimitée par C et l'axe des abscisses.

2° x_1 et x_2 sont deux réels strictement positifs tels que $x_1 + x_2 = 1$.
A l'aide de la question 1° montrer que:

$$x_1 \ln x_1 + x_2 \ln x_2 \geq \ln \frac{1}{2}$$

et que $x_1 \ln x_1 + x_2 \ln x_2 = \ln \frac{1}{2}$ si et seulement si $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$

3° On se propose de généraliser le résultat de la question 2°.
Soit φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ telle que φ' soit croissante.

a) Démontrer que $\varphi\left(\frac{x+a}{2} \right) \leq \frac{1}{2} \left(\varphi(x) + \varphi(a) \right)$

a et x étant deux réels strictement positifs quelconques.

A cet effet , on pourra étudier le sens de variation de la fonction :

$$h: \quad x \longmapsto \varphi(x) + \varphi(a) - 2\,\varphi\left(\frac{x+a}{2} \right).$$

b) Retrouver l'inégalité démontrée à la question 2° .

c) A l'aide d'un raisonnement par récurrence , démontrer que pour tout entier naturel non nul n et quels que soient les réels strictement positifs $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\varphi\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)$$

d) Justifier l' inégalité suivante : $\sum_{i=1}^{n} x_i \ln x_i \geq \ln \frac{1}{n}$

n étant un entier non nul et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des reels strictement positifs dont la somme vaut 1.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail